

Глава 6. Элементы теории раз- ностных схем

28/04

Еще раз сформулируем основные понятия.

Опр Сеткой на отрезке $[a, b]$ будем называть мн-во $x_i: x_i \in [a, b], \bar{\omega}_n = \{x_i: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

Опр Равномерная сетка: $x_i = i \cdot h$, где h — шаг сетки, $h = \frac{b-a}{n}$

Сеточн. ф-ции, заданные на $\bar{\omega}_n$, будем обозначать $y_i, v_i, f_i, \dots$, в общем случае — u_n .

Проекцию непр. ф-ции F на сетку будем обозначать $(F)_n = F(x_i)$, и т.д.
[задана дискр-ная зад.:

$\begin{cases} Lu = f, \\ u|_{\Gamma} = g, \end{cases}$ где L — диф-й оп-р; u, f, g — ф-ции
 переменной $x, x \in \Omega$; Γ — граница обл-ти,
 L — оп-р на границе обл-ти

Она аппроксимирована разностной
 схемой:

$\begin{cases} L_h u_h = f_h, \\ l_h u_h|_{\Gamma_h} = g_h, \end{cases}$ где L_h — разностный
 оп-р; u_h, g_h, f_h — сеточн. ф-ции; l_h —
 разност. оп-р на границе

Впр Погреш-ть разност. схемы (разност.
реш-а) — сеточн. ф-ция $\tau_h = u_h - (u)_h$

Впр $\psi_h = (Lu)_h - L_h u_h$ — погреш-ть аппр-
-ции оп-ра

$\chi_h = (f)_h - f_h$ — погреш-ть аппр-
-ции прав. части

Аналогич. опр-ния погреш-ти аппр-
 -ции можно сформулировать и д/границ.
 усл-й

Погреш-ть аппр-ции схемы складыв-
 -вается из всех погреш-тей:

$$\|\Phi_n\| = \underbrace{(Lu)_h - L_h(u)_h - (F)_h + f_h}_{=0 \text{ (в силу ур-а)}} = f_h - L_h(u)_h$$

Впр Схема имеет n -й пор-к аппр-ции,
if $\|\Phi_n\| = O(h^n)$

Аналогично д/погреш-тей аппр-ции
оп-ра, прав. части, начал. (краев.) усл-й.

П.1 Разностн. схема д/ур-а теплопровод-ти. Сх-та.

★ краев. зад. д/ур-а теплопровод-ти:

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1, \\ q(x) \geq c > 0 \end{cases}$$

Аппроксимируем ее разност. схемой:

$$\begin{cases} -y_{i,\bar{x}x} + q_i y_i = f_i, & i = 1, N-1, \\ y_0 = g_0, \quad y_N = g_1, \\ q_i = q(x_i) \geq c > 0, \\ f_i = f(x_i) \end{cases}$$

Будем ★ ее на равномер. сетке с ша-
гом $h = \frac{1}{N}$.

для производ-а, как показывалось ранее, аппрокс-ся в данном случае со зым пер-ком, где слагаемое и прав. часть аппрокс-ся точно $\Rightarrow$ погреш-ть аппр-ции:

$$\Phi_i = \underline{0} (h^2)$$

Заметим, что кр. усл-а тоже точно аппрокс-ся

↓ Реш-е разност. зад. (разност. схемы) $\Rightarrow$! и справедлива оценка: $\|y\|_c = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i| \leq |g_0| + |g_1| + \frac{1}{c} \|f\|_c$ (Основная ↓)

▲ 1) $\square$ y_i достигает $\max$ по $| \cdot |$ знач-е при $i=0$ или $i=N$: $\|y\|_c = \max\{|g_0|, |g_1|\}$, тогда $\|y\|_c \leq |g_0| + |g_1|$ заведомо, и, тем более, справедливо: $\|y\|_c \leq |g_0| + |g_1| + \frac{1}{c} \|f\|_c$

2) $\square$ $\|y\|_c$ достиг-ся в некот. внутр. т. i_0 : $\|y\|_c = |y_{i_0}|, i_0 \in \{1, \dots, N-1\}$

Вспомним, что $y_{i\bar{x}x} = \frac{1}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$

и ∇ : $-(y_{i_0+1} - 2y_{i_0} + y_{i_0-1}) = -[(y_{i_0+1} - y_{i_0}) + (y_{i_0-1} - y_{i_0})]$

а) $\square$ $y_{i_0} > 0 \Rightarrow y_{i_0+1} - y_{i_0} \leq 0, y_{i_0-1} - y_{i_0} \leq 0$, т.е.

$$\boxed{-y_{i_0, \bar{x}} \geq 0} \quad (*)$$

Из (*) и самой схемы $\Rightarrow$, что $g_{i_0} y_{i_0} \leq f_{i_0}$
 $\Rightarrow y_{i_0} \leq \frac{f_{i_0}}{c}$ и, тем самым, $\|y\|_c = |y_{i_0}| \leq \frac{\|f\|_c}{c}$

б) $\square y_{i_0} < 0$, т.е. y_{i_0} — min значение среди всех
 $y_i \Rightarrow y_{i_0+1} - y_{i_0} \geq 0$ и $y_{i_0-1} - y_{i_0} \geq 0 \Rightarrow \boxed{-y_{i_0, \bar{x}} < 0} \quad (**)$

Из (**) и самого ур-а $\Rightarrow g_{i_0} y_{i_0} \geq f_{i_0} \Rightarrow$
 $\Rightarrow g_{i_0} (-y_{i_0}) \leq -f_{i_0} \Rightarrow -y_{i_0} = \|y\|_c = |y_{i_0}| \leq \frac{|f_{i_0}|}{c} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \|y\|_c \leq \frac{\|f\|_c}{c}$

Совмещая п. 1) и 2), получаем, что

$$\|y\|_c \leq |g_0| + |g_1| + \frac{\|f\|_c}{c}$$

3) Докажем! лемма

— Если есть 2 р-а y_{i1} и y_{i2} , тогда их раз-
 ность $z_i = y_{i1} - y_{i2}$ будет удовл-ть разност. схе-
 ме: $\begin{cases} -z_{i, \bar{x}} + g_i z_i = 0, & 1 \leq i \leq N-1, \\ z_0 = z_N = 0 \end{cases}$

Как $\Rightarrow$ из только что доказ-й оц-ки
 $\|z\|_c \leq |0| + |0| + \frac{|0|}{c} = 0$, т.е. $z_i = 0$ и $y_{i1} = y_{i2}$

4) Запишем исходн. разност. схему в индек-

буде:

$$\begin{cases} -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q_i y_i = f_i, & 1 \leq i \leq N-1, \text{ или} \\ y_0 = g_0, \quad y_N = g_1 \end{cases}$$

$$-y_{i+1} \cdot \frac{1}{h^2} + (\frac{2}{h^2} + q_i) y_i - y_{i-1} \cdot \frac{1}{h^2} = f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1$$

Это СЛАУ с диагональ. преобладанием ($q_i \geq c > 0$) $\Rightarrow$ реш-е $\exists$ ■

▼ If $u \in C^4[0,1]$, то реш-е разност. схемы сх-ся к реш-ю диффр. ур-а со зым нор-ком: $\|y_i - u(x_i)\| = \|z_i\| = O(h^2)$

▲ Используем доказан. выше ▽. Тогда

$$- \text{то } z_i = y_i - u(x_i) \Leftrightarrow y_i = z_i + u(x_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -z_{i,xx} - u(x_i)_{xx} + q_i z_i + q_i u(x_i) = f(x_i) = f_i$$

$$-z_{i,xx} + q_i z_i = \underbrace{-[-u(x_i)_{xx} + q_i u(x_i)] - f(x_i)}_{\Phi_i}$$

Итак, z_i удовл. зад. $\begin{cases} -z_{xx} + q_i z_i = \Phi_i, & 1 \leq i \leq N-1 \\ z_0 = z_N = 0 \end{cases}$ Φ_i — погреш-ть аппр-ции

$$\text{То } \nabla: \|z_i\| \leq \frac{1}{c} \|\Phi_i\| = O(h^2) \quad \blacksquare$$

П.2. Монотонность разност. схемы
× разност. оп-р:

$$\boxed{L_h y_i = - \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + g_i y_i, \quad g_i \geq 0, \quad i = \overline{1, N-1}}$$

⇓ (о монотонности) $y_0 \geq 0, y_N \geq 0$ и

$L_h y_i \geq 0, i = \overline{1, N}$, тогда верно $y_i \geq 0, i = \overline{1, N-1}$

// вызывает прямые ассоциации с принципом макс д/ ур-а Лапласа //

▲ $\square \exists i_0: y_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq N-1} y_i < 0$, т.е. будем д-ть от противоположного.

Тогда в т. i_0 получаем:

$$L_h y_{i_0} = \underbrace{- \frac{(y_{i_0+1} - y_{i_0}) - (y_{i_0} - y_{i_0-1})}{h^2}}_{a} + \overbrace{g_{i_0} y_{i_0}}^{\leq 0}, \quad u \Rightarrow$$

$L_h y_{i_0} = -y_{i_0, \bar{x}} + g_{i_0} y_{i_0} < 0$ при $\underline{a \leq 0}$, что противоречит усл-ю $L_h y_i \geq 0$

If $a = 0 \Leftrightarrow y_{i_0+1} = y_{i_0} = y_{i_0-1} < 0$, но тогда $\exists i_1: y_{i_1} \neq y_{i_0}: y_{i_1} < y_{i_1-1}$ или $y_{i_1} < y_{i_1+1}$ (в противн. случае, ф-ция const-ая и ее знак-я удовл. краев. усл-м, а не отриц.). Тогда в т. i_1 :

$$- \frac{y_{i_1+1} - 2y_{i_1} + y_{i_1-1}}{h^2} < 0 \Rightarrow \text{снова приходим к}$$

противоречию.

Тем самым, не $\exists y_i < 0, i = \overline{1, N-1}$ ■

 (признак сравнения) $\exists y_i$ — реш-е $\{L_h y = f, y_0 = g_0, y_N = g_1\}$ а v_i — реш-е $\{L_h v = F, v_0 = G_0, v_N = G_1\}$; $q(x) \geq 0$, при этом:
 $|f_i| \leq F_i, |g_0| \leq G_0, |g_1| \leq G_1$. Тогда $|v_i| \geq y_i$,
 $i = 1, N-1$.

1) $\begin{cases} L_h (v - y) = F - f, \\ v_0 - y_0 = G_0 - g_0 \geq 0, \\ v_N - y_N = G_1 - g_1 \geq 0 \end{cases}$
 И.к. $F_i - f_i \geq 0$, то по доказ-ю $\exists$:
 $v_i - y_i \geq 0 \Leftrightarrow v_i \geq y_i$

2) $\begin{cases} L_h (v + y) = F + f, \\ v_0 + y_0 = G_0 + g_0 \geq 0, \\ v_N + y_N = G_1 + g_1 \geq 0 \end{cases}$
 И.к. $F_i + f_i \geq 0 \Rightarrow v_i + y_i \geq 0 \Rightarrow \underline{-v_i \leq y_i}$

3) Из 1) и 2) $\Rightarrow |v_i| \geq y_i$
 Ф-ция v_i — барьер (маторанта) г/ф-ции y_i

С использ-м маторант. ф-ции мож-но получить аналог оценки основной $\exists$ при $q(x) \geq 0$ (а не $q/|q(x)| \geq c > 0$)

$$\downarrow \begin{cases} -y_{i,\bar{x}} + g_i y_i = f_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ y_0 = g_0, \quad y_N = g_1, \quad g_i \geq 0, & i = \overline{1, N-1}. \end{cases}$$

$$y_0 = g_0, \quad y_N = g_1, \quad g_i \geq 0, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Пока справедлива априорная оценка:

$$\|y\|_C \leq |g_0| + |g_1| + \frac{1}{2} \|f\|_C$$

Это $\downarrow$ о равномерн. по $g(x)$ априорной оценке //

$$\star \text{ ф-цию } \varphi_i = |g_0|(1-\alpha_i) + |g_1|\alpha_i + d\alpha_i(1-\alpha_i)$$

$$\text{т.к. } 0 \leq \alpha_i \leq 1 \Rightarrow \underline{\varphi_i \geq 0}$$

$$2) \varphi_{i,\bar{x}} = |g_0| \frac{1 - \alpha_{i+1} - 2(1 - \alpha_i) - \alpha_{i-1} + 1}{h^2} +$$

$$+ |g_1| \frac{\alpha_{i+1} - 2\alpha_i + \alpha_{i-1}}{h^2} + d \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_{i+1}^2 - 2\alpha_i + 2\alpha_i^2 + \alpha_{i-1} - \alpha_{i-1}^2}{h^2} =$$

$$= |g_0| \frac{(-\alpha_i - h + 2\alpha_i - \alpha_i + h)}{h^2} + |g_1| \frac{(-\alpha_i + h + 2\alpha_i - \alpha_i + h)}{h^2} +$$

$$+ d \frac{\alpha_i + h - \alpha_i^2 - 2\alpha_i h - h^2 - 2\alpha_i + 2\alpha_i^2 + \alpha_i - h - \alpha_i^2 + 2\alpha_i h - h^2}{h^2}$$

$$= -2d$$

$$\text{т.о. } L_h \varphi_i = -\varphi_{i,\bar{x}} + g_i \varphi_i = 2d + \overbrace{g_i \varphi_i}^{\geq 0} = f_i$$

$$\text{или } L_h \varphi = f_i,$$

$$\varphi_0 = |g_0|, \quad \varphi_N = |g_1| \text{ и исходная зад.}$$

$$L_h y = f_i, \\ y_0 = g_0, \quad y_N = g_1$$

Выберем α так, что $d: F \geq \|f\|$

$$F_i = 2d + g_i v_i \geq 2d = \|f\|_c \rightarrow \text{отсюда выберем}$$

$$d = \frac{\|f\|_c}{2} \Rightarrow \text{при макс } d: F_i \geq \|f\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{но при } \nabla F \Rightarrow |y_i| < v_i$$

$$3) \max_i v_i = ?$$

$$0 \leq x_i \leq 1$$

$$|g_0|(1-x_i) \leq |g_0|,$$

$$|g_1|x_i \leq |g_1|$$

$$x_i(1-x_i) \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow v_i \leq |g_0| + |g_1| + \frac{\|f\|_c}{8} g_i / v_i$$

$$\Rightarrow \|y_i\| \leq |g_0| + |g_1| + \frac{\|f\|_c}{8}$$